

Lemme de Borel-Cantelli

et une application.

Leçon 121, 230, 262, 266

Référence Duglhin, Rezoark p. 72 exo 1.28 et ~~ex~~ 1.31 p. 77

Exercice 1 Soit (A_n) une suite d'événements, posons $A := \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ limsup A_n

1) Mg $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(A) = 0$

2) Application: (X_n) et X V.A. . $\forall \varepsilon > 0$, $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$

Mg $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 0} P(A_n(\varepsilon)) < \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

3) Supposons (A_n) indépendants. Mg $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(A) = 1$.

Exercice 2

Le but est de montrer qu'il n'existe pas de probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\{\text{multiple de } n\}) = \frac{1}{n}$. Notons $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite des nb premiers, et supposons par l'absurde que cette proba P existe.

1) Mg $A_{p_k} := \{\text{multiples de } p_k\}$ sont indépendants

2) Nature de $\sum_{k \geq 1} P(A_{p_k})$?

3) Conclusion.

Démonstration 1

1) Posons $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$, $(B_n)_{n \geq 0}$ est donc $\searrow$, donc $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$ par continuité à gauche. De plus, on sait que $P(B_n) \leq \sum_{k \geq n} P(A_k)$ par σ -additivité et comme $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$ par hypothèse, $P(A) = 0$.

2) Posons $B(\varepsilon) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k(\varepsilon)$. Par hypothèse et d'après 1), $P(B(\varepsilon)) = 0$.
Posons $B := \bigcup_{p \geq 1} B(\frac{1}{p})$, donc $P(B) \leq \sum_{p \geq 1} P(B(\frac{1}{p})) = 0$.

Soit $\omega \in \Omega \setminus B$. On a :

$$\forall p \geq 1, \exists n \geq 0, \forall k \geq n, |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{p}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\text{D'où } X_n \xrightarrow{ps} X.$$

$$3) A^c = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k^c (= \liminf A_n^c)$$

$$\text{Mq } \forall n \geq 0, P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right)_{n \geq 0} \text{ est } \searrow, P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \end{aligned}$$

$\nearrow$ indep.

S'il existe $k \geq N$ tel que $P(A_k) = 1$, c'est immédiat. Sinon, $\forall k \geq n$, $1 - P(A_k) > 0$ et donc :

$$\ln\left(\prod_{k=n}^N (1 - P(A_k))\right) = \sum_{k=n}^N \ln(1 - P(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^N P(A_k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{car d.v.}} -\infty$$

Démonstration 2

1) Soit $P \subset \{p_k, k \geq 1\}$ finie. On a:

$$P\left(\bigcap_{p \in P} A_p\right) = P\left\{\text{multiples de } \prod_{p \in P} p\right\} = \frac{1}{\prod_{p \in P} p} = \prod_{p \in P} \frac{1}{p} = \prod_{p \in P} P(A_p)$$

2) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge donc $\sum_{k \geq 1} P(A_{p_k}) = +\infty$.

3) Appliquons le lemme de Borel-Cantelli; les événements $(A_{p_k})_{k \geq 1}$ étant indépendants: $P(\limsup A_{p_k}) = 1$.

Ainsi, pour presque tout entier $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres premiers le divisant. Absurde. $\square$

Bonus On tape aléatoirement un texte au clavier, chaque caractère étant équiprobable. Montrer que p.s., le texte tapé contiendra l'intégrale de Nicolas Bourbaki.

Démonstration 3 Soit X_n la VA représentant le caractère tapé à la $n^{\text{ème}}$ étape.

Les VA $(X_n)_{n \geq 0}$ sont iid. Soit ℓ le nombre de longueur de l'intégrale de Bourbaki dans l'ordre chronologique et $(c_i)_{i \in [1, \ell]}$ la suite de caractères.

Posons $A_k = \{ \forall i \in [1, \ell], X_{k+i} = c_i \}$ l'événement représentant le moment où le texte voulu est tapé. Les événements $(A_k)_{k \geq 0}$ sont indépendants et $\forall k \geq 0, P(A_k) = \frac{1}{N^\ell}$ où N est le nombre de touches sur le clavier.

Comme $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{N^\ell} = +\infty$, par le lemme de Borel-Cantelli, $P(A_k \text{ i.s.}) = 1$. $\square$